Revista Ethos Venezolana
Vol. 4 No. 1, Enero-Junio 2012, 109 - 124
ISSN 1856-9862 ~ Depósito legal pp 200902ZU3258

Implicaciones teóricas de los modelos de crecimiento económico exógeno*

Alí Javier Suárez Brito**
Katherine Rincón***

Resumen

El objetivo del artículo es analizar las implicaciones teóricas de los modelos de crecimiento económico exógeno de Solow y de Ramsey. La revisión de carácter documental estableció que la diferencia fundamental entre ambos, se encuentra en la determinación de la tasa de ahorro. Por otra parte, del modelo de Ramsey se desprende que el comportamiento de las variables agregadas está determinado por decisiones microeconómicas, ya que, éstas dependen del afán maximizador de los agentes. Por el contrario, en el modelo de Solow, la conducta de las variables no responde a estos criterios de maximización.

Palabras clave: modelos de crecimiento exógeno, implicaciones teóricas de los modelos, modelo de Solow, modelo de Ramsey, teorías del crecimiento económico.

* Este artículo se deriva del conjunto de problemas propuestos por el Dr. José U. Mora en el seminario de Macroeconomía Avanzada del Doctorado en Ciencias Económicas de la Universidad del Zulia (Cohorte V).

** Economista, Magíster Scientiarum en Gerencia Financiera. Candidato a Doctor en Ciencias Económicas. Profesor Ordinario de la cátedra Macroeconomía II del Núcleo LUZ-COL Profesor de Macroeconomía y Teoría Económica de la Universidad Alonso de Ojeda. macroeconomiayfinanzas@gmail.com.

*** Ingeniero, egresada de la Universidad Nacional Experimental Rafael María Baralt (UNERMB), Maestrante del programa de Gerencia de Proyectos Industriales de la Universidad Dr. Rafael Belloso Chacín. Profesora de Ingeniería Económica y Contabilidad de Costos de la Universidad Alonso de Ojeda. kyrc4@hotmail.com.

Recibido: 10-03-12 ⌘ Aceptado: 28-05-12

Theoretical Implications of Exogenous Economic Growth Models

Abstract

The objective of this article is to analyze theoretical implications of the exogenous economic growth models by Solow and Ramsey. A documentary review established that the fundamental difference between them is in the way they determine the savings rate. On one hand, Ramsey's model states that added variables behavior is determined by microeconomic decisions, since they depend on the maximizing eagerness of the agents. On the other hand, in Solow´s model, behavior of the variables does not respond to these maximizing criteria.

Key words: exogenous growth models, theoretical implications of the models, Solow´s model, Ramsey´s model, economic growth theories.

Introducción

La tarea fundamental de la macroeconomía, es el análisis detallado de las cifras agregadas de una nación. No obstante, el análisis macroeconómico trasciende su objetivo general cuando la realidad obliga a estudiar los aspectos que determinan la evolución de los eventos económicos mundiales. Por ejemplo, para Romer (2005), las cuestiones más importantes de la economía son: ¿por qué algunos países son pobres y otros ricos?; ¿qué causas explican el crecimiento de una economía?; ¿qué factores se encuentran en el origen de las recesiones y los auges económicos?

Al respecto, existe un debate acerca de las implicaciones del término "crecimiento económico"; por una parte, se entiende que la cuantificación de las variaciones en el producto real de un país permite obtener su tasa de crecimiento y, por otra parte, existe una discusión sobre cuán representativas son estas mediciones en la producción total. Sin embargo, existe una cantidad de teorías de valor inestimable, en las cuales, se resuelve el dilema anterior, ya que, para cada una de ellas es de general aceptación que el crecimiento económico es un aumento del producto real per cápita. En otras palabras, "a fin de que el crecimiento económico mejore la calidad de vida, la tasa de crecimiento debe exceder la tasa de crecimiento demográfico" (Case y Fair, 2008:361).

Adicionalmente, si se considera que la producción nacional está en función de la cantidad de trabajo (L), del volumen de capital (K) y suponiendo que la tierra (t) es fija, se desprende que, la economía crecerá cuando: a.) aumenta la oferta de mano de obra; b.) se amplía el capital humano y físico, y, c.) crece la productividad, es decir, la cantidad de producción por unidad de mano de obra o de capital.En otro orden de ideas, la bibliografía relacionada a las teorías del crecimiento refieren dos períodos claramente delimitados, así "el período 1936-1970 es marcado por una visión exógena, mientras que el período que va desde 1985 hasta hoy en día se caracteriza por una visión endógena del crecimiento económico" (Gerald, 2007:5).

La perspectiva exógena, contempla que las causas del crecimiento se encuentran en factores externos, es decir, que las variables que explican el progreso son exógenas. Pero, la visión endógena desestima este supuesto y, en contraposición, supone que el progreso técnico es el producto de las inversiones efectivas de los agentes económicos en su búsqueda constante de beneficios, por lo que, el crecimiento lo marca el ritmo de los agentes. Estos son los rasgos más representativos de las discusiones en torno al crecimiento de una nación. En el presente trabajo, se analizarán las implicaciones teóricas de dos modelos de crecimiento exógeno, como lo son: el Modelo de Solow y el Modelo de Ramsey, con el propósito de establecer interrelaciones entre los factores que determinan el crecimiento económico, cuando el progreso técnico es el resultado de eventos exógenos.

Para el cumplimiento del objetivo, se recurrió a una revisión de carácter documental que permitió obtener información proveniente de fuentes impresas ya existentes. Así, "cuando la fuente principal de información son documentos y cuando el interés del investigador es analizarlos como hechos en sí mismos (fuentes primarias) o como documentos que nos brindan información sobre otros hechos (fuentes secundarias), estamos en presencia de una investigación que podemos tipificar como documental" (Ramírez, 1999:75).

Fundamentación teórica

Modelo de Robert Solow

Para Romer (2005), el modelo de Solow gira en torno a cuatro variables: la producción (Y), el capital (K), el trabajo (L) y la tecnología (A). En términos generales, la producción real, está en función de determinadas cantidades de cada una de esas variables y, como es de esperarse, las fluctuaciones de los mismos se traducen en variaciones de la producción.

Solow se basó en una ecuación de crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB) de Estados Unidos, en la que el capital y el trabajo, junto al progreso técnico explicaron el crecimiento de la producción. Específicamente, "entre 1909 y 1949, el crecimiento anual medio del PIB total fue del 2,9 por ciento al año. Solow llegó a la conclusión de que un 0,32 por ciento de esa cifra podría atribuirse a la acumulación de capital, un 1,09 por ciento a los aumentos de la cantidad de trabajo y el 1,49 por ciento restante al progreso técnico. La producción pe cápita creció un 1,81 por ciento al año, del cual 1,49 puntos porcentuales se debieron al progreso técnico" (Dornbusch y otros, 2004:61).

En resumen, para Solow los determinantes más importantes del crecimiento del PIB son, en orden: el progreso técnico, el aumento de la oferta de trabajo y la acumulación de capital. Mientras que para el PIB per cápita son el progreso técnico y la acumulación de capital.

Dinámica del modelo

Para la explicación de los supuestos del modelo de Robert Solow, es necesario operacionalizar las soluciones para la función de producción y el comportamiento temporal de los factores productivos considerados, a saber: el trabajo, el capital y la tecnología. Así pues, partiendo de la función Cobb-Douglas: $Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$ que es homogénea de grado 1, la misma implica la existencia de rendimientos constantes a escala. Para encontrar su forma intensiva, se divide entre la cantidad de trabajo (L) para obtener la función de producción en términos per cápita, así:

$$F(K/L;\, L/L) = A(K/L;\, L/L)$$

$$F(K;\, 1) = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}$$

De manera que: $F(k) = A(k)^{\beta}$ Por lo que: $y = A(k)^{\beta}$

De modo que, la producción per cápita está en función del progreso técnico (A) y el stock de capital (k). De forma que, $Y = C + I$, es decir, la producción es igual al consumo más la inversión. Igualmente: $I = S$ (inversión es igual al ahorro). Si se tiene que:

$$I = Kt + \delta(Kt)$$

$$S = s(Y)$$

$$\text{Entonces: } k = s(yt) - (n - \delta)k$$

$$k = sA(k)^{\beta} - (n + \delta)k$$

$$k / k = sA(k)^{\beta} / k - (n + \delta)k / k$$

$$k / k = sA(k)^{\beta - 1} - (n + \delta)$$

Este resultado es el fundamento de la teoría neoclásica del crecimiento económico, representada por la ecuación de acumulación de capital. Aquí, $sA(k)^{\beta-1}$ es la inversión por unidad de trabajo efectivo y $(n+\delta)$ es el stock de capital por unidad de trabajo requerido, donde n es la tasa de crecimiento de la población y δ es la tasa de depreciación del capital.

Soluciones en el estado estacionario

El estado estacionario representa una situación donde las variables del modelo crecen a una tasa constante. A partir de aquí, se obtienen las soluciones para el stock de capital, el consumo y el producto real. Como en el estado estacionario, las variables per cápita crecen a una tasa constante igual a cero, entonces: $k/k = 0$. Por tanto, se iguala a cero la ecuación de acumulación de capital y se despeja k, así:

$$k / k = sA(k)^{\beta - 1} - (n + \delta)$$

El resultado de lo anterior, permite plantear la ecuación de capital en el estado estacionario, como función de los parámetros: s, A, n, δ y β:

$$k^{ee} = \left[\frac{sA}{n + \delta} \right]^{1/(1-\beta)}$$

donde:

k^{ee} = Stock de capital en el estado estacionario

n = Tasa de crecimiento de la población

s = Tasa de ahorro

A = Progreso técnico

δ = Depreciación del stock de capital
β = Productividad marginal del capital

Asimismo, el producto real per cápita está determinado por los siguientes parámetros:

$$y^{ee} = A(k^{ee})^{\beta}$$

$$y^{ee} = A\left[\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right]^{\beta}$$

donde y^{ee} es el producto real *per cápita* en el estado estacionario; demostrándose de esta forma que el progreso técnico y el stock de capital per cápita elevan el producto. Igualmente, se puede establecer el consumo per cápita en el estado estacionario (c^{ee}):

$$c^{ee} = (1-s)A(k^{ee})^{\beta}$$

$$c^{ee} = (1-s)A\left[\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right]^{\beta}$$

$$c^{ee} = (1-s)y^{ee}$$

En otras palabras, el consumo per cápita se encuentra determinado por los mismos parámetros del stock de capital y el producto real. La ecuación plantea que un aumento del producto real y del stock de capital eleva el consumo en el estado estacionario, pero, un aumento en la tasa de ahorro lo reduce. Por otra parte, suponiendo la existencia de un gobierno que establece un impuesto sobre el ingreso per cápita, pero, presumiendo que su gasto público $(G) = 0$, las ecuaciones y los valores cambian. Como el impuesto es sobre el ingreso per-cápita, se tiene que la recaudación impositiva: $T = t(Y)$, así:

Tomando la función de producción per cápita y sustituyéndola en la ecuación per cápita: $k = sA(k)^{\beta} - (n+\delta)k$. Considerando la tasa impositiva sobre el ingreso per cápita, la nueva ecuación de acumulación de capital se obtiene como sigue:

$$k = s(1-t)A(k)^{\beta} - (n+\delta)k$$

$$k / k = s(1-t)A(k)^{\beta} / k - (n+\delta)k / k$$

$$k / k = s(1-t)A(k)^{\beta-1} - (n+\delta)$$

Las soluciones para las variables en el estado estacionario, son totalmente distintas a las iniciales. Como en el estado estacionario, las variables per cápita crecen a una tasa constante igual a cero, entonces: $k / k = 0$.

Se despeja k de la nueva ecuación de acumulación de capital, se obtiene la nueva ecuación del stock de capital per cápita en el estado estacionario (k^{ee}) y la respectiva solución:

$$k^{ee} = \left[\frac{s(1-t)A}{n+\delta} \right]^{1/(1-\beta)}$$

Limitaciones del modelo de Solow

Las implicaciones teóricas del Modelo de Solow expuesta en este trabajo, consideran el progreso técnico dentro del mismo; no obstante, una de las limitaciones del modelo original, según Mora (2009), es que éste no considera el progreso tecnológico y, por tanto, la tecnología de la producción es constante. Paralelamente, se establece que el ingreso real per cápita es constante en el estado estacionario. En contraposición, "Ninguno de éstos (*sic)* es cierto en el mundo real: Entre 1904-2004 el producto real per-cápita de USA se multiplicó por un factor de 7,6 o creció a una tasa aproximada de 2% por año. Los ejemplos del progreso técnico son abundantes" (Mora, 2009). En otro orden de ideas, otra de las limitaciones "se encuentra no sólo el predecir un estado estacionario en el que el stock de capital per cápita deja de crecer, sino también el permitir que un parámetro tan importante como es la tasa de ahorro se encuentre determinada exógenamente" (Oscátegui, 2009:1).

Modelo de Ramsey

Una de las diferencias fundamentales entre el modelo de Ramsey y el modelo de Solow, consiste en que en el primero la tasa de ahorro es endógena; por ello, se puede estudiar la forma en que los incentivos determinan el comportamiento de la economía. En el modelo de Ramsey, para Oscátegui (2009:1): "tanto los consumidores como los productores toman decisiones que maximizan su utilidad y sus beneficios, respectivamente". Es decir, los agentes económicos asumen una actitud maximizadora de utilidad en un horizonte intertemporal.

Dinámica del modelo

Para continuar con la explicación del modelo, es necesario establecer los supuestos de análisis. En este sentido, se considerará un agente centralizador que toma las decisiones de trascendencia en la economía (que es cerrada, con instituciones pero sin intervención del gobierno) y que tiene una función de utilidad $ut = ln\ (ct)$. En el país no existe crecimiento tecnológico ($a = 0$), la población (N) crece a una tasa n, el stock de capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$ y la función de producción agregada es igual a $Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$ donde $A = 1$ y $0 < \beta < 1$. En el modelo el coeficiente ρ representa la tasa a la que se descuenta la utilidad a lo largo del tiempo. En el caso estudiado $\rho > 0$, lo cual, significa que, para el agente centralizador de las decisiones, la utilidad presente del consumo es mayor que la utilidad futura del mismo.

Función de valor presente de la utilidad esperada

Considerando que

$$ut = \ln(ct);\ \rho > 0$$

$$\text{Entonces: Max} = \int_0^{\infty} \ln(ct)e^{-\rho t}dt$$

donde:

ln =	logaritmo neperiano
(ct) =	consumo per cápita
t =	trayectoria temporal
e =	base de los logaritmos neperianos
ρ =	tasa de descuento de la utilidad esperada
dt =	derivada de ct con respecto al tiempo

De esta manera, para resolver el problema del agente centralizador, consistente en la consecución de un patrón óptimo de consumo, se obtiene la función de producción real per cápita, la ecuación de acumulación de capital y, por último, se construye el hamiltoniano para determinar las condiciones de primer orden. Partiendo de la función Cobb-Douglas:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta} \text{ (Homogénea de grado 1)}$$

Se desarrolla la forma intensiva de la función, multiplicando por $1/L$ o dividiendo entre L, así:

$$F(K / L; L / L) = A(K / L; L / L)$$

$$F(K; 1) = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}$$

De manera que: $F(k) = A(k)^{\beta}$

Por lo que: $y = A(k)^{\beta}$

Como la economía es cerrada: $Y = C + I$, se deduce que, el ahorro es igual a la inversión: $S = I$. Por tal motivo, siguiendo se tiene que: $I = kt + \delta(Kt)$.

Es decir, la inversión es igual al stock de capital más la depreciación.

Si se considera que:

$$Y = c + kt + \delta(Kt)$$

Se despeja k, para obtener la ecuación del stock de capital agregado:

$$\mathrm{K = y - ct} - \delta(Kt)$$

Para transformarla en términos per cápita y considerando que L crece a una tasa n:

$$k / k = k / k - L / L$$

Así: $k / k - n$

Sustituyendo k por $y - ct - \delta(Kt)$ se tiene:

$$k / k = \frac{y - ct}{k} - (n + \delta)$$

Expresando en términos per cápita:

$$k / k = \frac{(y - ct) / L}{k / L} - (n + \delta)$$

$$k\ /\ k = \frac{y - ct}{k} - (n + \delta)$$

Entonces: $K = y - ct - (n + \delta)k$

Sustituyendo "y" por $A(k)^{\beta}$, se obtiene la ecuación de acumulación de capital:

$$k = A(k)^{\beta} - ct - (n + \delta)k$$

Seguidamente, se encuentra la variación del stock de capital en el estado estacionario: $k\ /\ k = A(k)^{\beta-1} - ct - (n + \delta)$. Ahora bien, para conocer las condiciones de primer orden, se construye el hamiltoniano para resolver el problema dinámico:

$$H = \ln(ct)e^{-pt} + \mu t\left[A(k)^{\beta} - ct - (n + \delta)k\right]$$

En este caso, se deriva el hamiltoniano con respecto a ct para obtener la condición de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial ct} = \ln(ct)e^{-pt} - \mu te^{-pt} = 0$$

Entonces: $\ln(ct) - \mu t = 0$

$$\ln(ct) = \mu t$$

Utilidad marginal del consumo

Siguiendo con la obtención de las condiciones de primer orden, se μt con respecto al tiempo t:

$$\frac{\partial \mu t}{\partial t} = \mu \circ te^{-pt} + \mu te^{-pt}(-p)$$

$$\mu \circ te^{-pt} - p(\mu te^{-pt})$$

Para obtener otra condición de primer orden, se iguala esta ecuación con la derivada parcial del hamiltoniano con respecto al stock de capital:

$$\mu \circ te^{-pt} - p(\mu te^{-pt}) = -\mu te^{-pt}\left[A\beta(k)^{\beta-1} - \mu te^{-pt} - (n + \delta)\right]$$

$$\frac{\partial \mu t}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

Se dividen estas ecuaciones entre μ, y se tiene:

$$\mu \circ te^{-pt} - p(e^{-pt}) = -e^{-pt}\left[A\beta(k)^{\beta-1} - e^{-pt} - (n+\delta)\right]$$

Igualmente, estas ecuaciones se dividen entre :

$$\mu \circ t - p = -\left[A\beta(k)^{\beta-1} - (n+\delta)\right]$$

$$\mu \circ t / \mu = -\left[A\beta(k)^{\beta-1} - (n+\delta+p)\right]$$

$$\mu \circ t / \mu = (n+\delta+p) - A\beta(k)^{\beta-1}$$

Soluciones en el estado estacionario

Partiendo de las condiciones de primer orden y considerando además que en este país no existe crecimiento tecnológico ($a = 0$), la población N crece a una tasa n, y que en el estado estacionario las variables per cápita crecen a una tasa constante igual a cero, se emplea la siguiente ecuación:

$$k / k = A(k)^{\beta-1} - ct - (n+\delta)$$

donde $k / k = k / k - L / L$

De modo que, en estado estacionario el capital y el consumo per cápita no crecen. Se toma la ecuación derivada con respecto al stock de capital:

$$\mu \circ t / \mu = (n+\delta+p) - A\beta(k)^{\beta-1}$$

Pero, como $\mu \circ t / \mu = 0$, entonces: $(n+\delta+p) - A\beta(k)^{\beta-1} = 0$

Se despeja el capital (k) en el estado estacionario:

$$A\beta(k)^{\beta-1} = (n+\delta+p)$$

Así se tiene la ecuación del stock de capital en el estado estacionario:

$$k^{ee} = \left[\frac{a\beta}{n+\delta+p}\right]^{1/(1-\beta)}$$

Además: $y = A(k)^{\beta}$

Por tanto, para conseguir la ecuación del productor real per cápita en el estado estacionario:

$$y^{ee} = A(k^{ee})^{\beta}$$

$$y^{ee} = A\left[\left(\frac{A\beta}{n+\delta+p}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right]^{\beta}$$

Establecimiento de un impuesto en el modelo de Ramsey

En términos generales, el establecimiento de un impuesto en el modelo de Ramsey tiene los mismos efectos sobre el stock de capital y el producto real per cápita, que el observado en el modelo de Solow. Sin embargo, es necesario mostrar los cambios en la ecuación de acumulación de capital y, por tanto, de las soluciones en el estado estacionario. Refiriendo los resultados iniciales, se supone la existencia de un gobierno que cobra un impuesto $0 < \tau < 1$ sobre el ingreso real pero su gasto es igual a cero ($G = 0$). Como el impuesto ($0 < \tau < 1$) es sobre el ingreso per-cápita, se tiene que la recaudación impositiva: $T = t(Y)$, de esta manera, tomando la función de producción per cápita y sustituyéndola en la ecuación per-cápita:

$$k = A(k)^{\beta} - (n+\delta)k$$

Considerando la tasa impositiva sobre el ingreso per-cápita, se presente la nueva ecuación de acumulación de capital:

$$k = (1-t)A(k)^{\beta} - (n+\delta)k$$

Siguiendo:

$$k / k = (1-t)A(k)^{\beta} / k - (n+\delta)k / k$$

$$k / k = (1-t)A(k)^{\beta-1} - (n+\delta)$$

Se plantea el mismo problema del agente centralizador:

$$\text{Max} = \int_0^{\infty} \ln(ct)e^{-pt}dt$$

Se construye el hamiltoniano considerando la inclusión del impuesto al ingreso real:

$$H = \ln(ct)e^{-pt} + \mu t\left[(1-t)A(k)^{\beta} - ct - (n+\delta)k\right]$$

Se deriva el hamiltoniano con respecto a *ct*, obteniéndose la condición de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial ct} = \ln(ct)e^{-pt} - \mu te^{-pt} = 0$$

$$\text{Entonces: } \ln(ct) - \mu t = 0$$

$$\ln(ct) = \mu t$$

Utilidad marginal del consumo

Se deriva μt con respecto al tiempo t:

$$\frac{\partial \mu t}{\partial t} = \mu \circ te^{-pt} + \mu te^{-pt}(-p)$$

$$\text{Así: } \mu \circ te^{-pt} - p(\mu te^{-pt})$$

Se iguala esta ecuación con la derivada parcial del hamiltoniano con respecto al stock de capital:

$$\mu \circ te^{-pt} - p(\mu te^{-pt}) = -\mu te^{-pt}\left[(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} - \mu te^{-pt} - (n+\delta)\right]$$

que es una condición de primer orden

$$\frac{\partial \mu t}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

Se dividen estas ecuaciones entre μ, y se tiene:

$$\mu \circ te^{-pt} - p(te^{-pt}) = -e^{-pt}\left[(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} - e^{-pt} - (n+\delta)\right]$$

Se dividen estas ecuaciones entre e^{-pt} y:

$$\mu \circ t - p = -\left[(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} - (n+\delta)\right]$$

$$\mu \circ t / \mu = -\left[(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} - (n+\delta+p)\right]$$

$$\mu \circ t / \mu = (n+\delta+p) - (1-t)A\beta(k)^{\beta-1}$$

Nuevas soluciones en el estado estacionario

Partiendo de las condiciones de primer orden y considerando los supuestos iniciales. Se considera la ecuación:

$$k / k = (1-t)A(k)^{\beta-1} - ct - (n+\delta)$$

donde $k / k = k / k - L / L$

En el estado estacionario el capital y el consumo per cápitano crecen. Se emplea la ecuación derivada con respecto al stock de capital:

$$\mu \circ t / \mu = (n+\delta+p) - (1-t)A\beta(k)^{\beta-1}$$

$$\text{Como } \mu \circ t / \mu = 0$$

$$\text{Entonces: } (n+\delta+p) - (1-t)A\beta(k)^{\beta-1} = 0$$

Al despejar k en el estado estacionario:

$$(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} = (n+\delta+p)$$

Así se tiene la nueva ecuación del stock de capital en el estado estacionario:

$$k^{ee} = \left[\frac{(1-t)A\beta}{n+\delta+p}\right]^{1/(1-\beta)}$$

Además de lo anterior: $y = A(k)^{\beta}$

Por ello, se procede a la obtención de la nueva ecuación del producto real per cápita en el estado estacionario:

$$y^{ee} = A(k^{ee})^{\beta}$$

$$y^{ee} = A\left[\left(\frac{(1-t)A\beta}{n+\delta+p}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right]^{\beta}$$

En caso de producirse cambios en la tasa impositiva, tanto el stock de capital y el producto real per cápita también variarán. Partiendo de:

$$(n+\delta+p) - (1-t)A\beta(k)^{\beta-1} = 0$$

En el estado estacionario, se cumple la condición:

$$(1-t)A\beta(k)^{\beta-1} = (n+\delta+p)$$

Además, en el estado estacionario: $c° = k° = A° = 0$

Por ello:

$$k^{ee} = \left[\frac{(1-t)A\beta}{n+\delta+p}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Para determinar la relación entre el impuesto y las variables del estado estacionario, se deriva el stock de capital con respecto al impuesto, así:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{(1-t)A\beta}{n+\delta+p}\right]^{\frac{1}{1-\beta}-1}\left[\frac{(1-t)A\beta}{n+\delta+p}\right] < 0$$

Lo anterior implica una relación inversa entre los impuestos y el stock de capital. Es decir, si aumentan los impuestos se reduce el stock de capital en el estado estacionario, lo cual, al mismo tiempo, se traduce en una reducción del producto en el estado estacionario.

Consideraciones finales

Como se ha demostrado a través del análisis de los modelos, la diferencia fundamental entre ambos se encuentra en la determinación de la tasa de ahorro. Para Solow, el ahorro es exógeno, mientras que para Ramsey, el ahorro se determina de manera endógena y no es constante. Esto quiere decir que, "la evolución del stock de capital se hace ahora depender (sic) de la interacción del comportamiento maximizador de las economías domésticas y el de las empresas en un mercado competitivo, de modo que la tasa de ahorro ya no es exógena, ni tiene por qué ser constante" (Romer, 2005: 41).

Además de esto, la visión del modelo de Ramsey, permite inferir que el comportamiento de las variables agregadas viene determinado por decisiones microeconómicas; esto, si se considera que la tendencia de muchas de ellas depende del afán maximizador de los agentes. Por el contrario, con relación a las implicaciones teóricas del modelo de Solow, la conducta de estas variables no responde a estos criterios de maximización.

Pese a estas diferencias, las dos posiciones teóricas siguen considerando exógenas el crecimiento de la mano de obra y el progreso tecnológico, lo cual, son supuestos que le han reportado severas críticas, debido a la imposibilidad de explicar el crecimiento experimentado por muchas economías. Salvando estas limitaciones, en ambos modelos se establece que el crecimiento económico de una nación radica en la formación constante de capital y en el progreso tecnológico. Así pues, estas perspectivas teóricas representan una contribución a la comprensión del fenómeno del crecimiento económico y, ponen de manifiesto, que éste se halla determinado por una serie de parámetros y decisiones que escapan de los análisis macroeconómicos convencionales.

Referencias bibliográficas

Case, Karl y Fair, Ray (2008). **Principios de Macroeconomía.** Octava edición. Editorial Pearson - Prentice Hall.

Dornbusch, Rudiger, Stanley Fisher y Richard Startz (2004). **Macroeconomía.** Novena edición. Editorial McGraw Hill.

Gerald, André (2007). Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno. Edición electrónica gratuita. Texto completo y disponible en: www.eumed.net/libros/2007a/243/

Mora, José (2009). Tema 4. Crecimiento económico. Material de apoyo del Seminario de Macroeconomía Avanzada del Doctorado en Ciencias Económicas de la Universidad del Zulia (Cohorte V).

Oscátegui, José (2009). Materiales de enseñanza. El modelo de Ramsey. Edición electrónica gratuita. Texto completo en: http://blog.pucp.edu.pe/media/2375/20091026-El%20modelo%20de%20Ramsey.doc

Ramírez, Tulio (1999). **Cómo hacer un proyecto de investigación: Guía Práctica.** Editorial Panapo. Caracas, Venezuela.

Romer, David (2005). **Macroeconomía Avanzada.** Segunda Edición. Editorial McGraw Hill.